Varianta 59

Subiectul I.

a) $AC = 4\sqrt{2}$.
b) 4.
c) $i^{2007} = -i$.
d) Ecuația tangentei este: $x + 2y + 6 = 0$.
e) $x_A + y_A + z_A = x_B + y_B + z_B = x_C + y_C + z_C = 4$, deci punctele A, B, C aparțin planului din enunț.
f) $z_{1,\,2} = 3 \pm 4i$.

Subiectul II.

1.
a) $C_5^1 + C_5^3 + C_5^5 = 16$.
b) $\log_2(\log_3 9) = 1$.
c) $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + ... + 2^8 = 171$.
d) $x = 3$.
e) Există 6 funcții surjective ca în enunț.

2.
a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, pentru $x > 0$.
b) Există un unic punct de extrem (de minim) al funcției f.
c) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.
d) $f''(x) > 0$, $\forall\, x > 0$ deci funcția f este convexă pe $(0, \infty)$.
e) $\int_1^e (x - 1 - f(x))\, dx = 1$

Subiectul III.

a) $\det(A) = -4$.
b) $f_A(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 4$.
c) Se arată prin calcul direct, sau ținând cont de faptul că $f_A(x) = (x+2)(x^2 - 2)$ şi $f_A(-A) = 0$.
d) Calcul direct.
e) Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, considerăm $k \in \mathbf{Z}$ şi numerele întregi consecutive $k+1$, $k+2$, ..., $k+n$.

I. $\underline{k \geq 0}$: Din punctul **d)** avem că $P = (k+1)\cdot(k+2)\cdot \ldots \cdot (k+n) = n!\cdot C_{k+n}^{k}$ şi deoarece $C_{k+n}^{k} \in \mathbf{N}^*$, rezultă că P este divizibil cu $n!$.

II. $\underline{k \in [-n, -1]}$: Avem că $P = 0$, aşadar P este divizibil cu $n!$.

III. $\underline{k \leq -n-1}$: Avem $P = (-1)^n \cdot (-k-1)\cdot(-k-2)\cdot \ldots \cdot (-k-n) = (-1)^n \cdot Q$.

Deoarece numerele $-k-n$, ..., $-k-2$, $-k-1$ sunt numere naturale consecutive, din cazul **I.** rezultă că numărul Q este divizibil cu $n!$, deci şi numărul P este divizibil cu $n!$.

f) Notăm cu a rădăcina întreagă a polinomului g.

Există polinomul $h \in \mathbf{Z}[X]$ astfel încât $g(X) = (X-a)\cdot h(X)$.

$E = g(0)\cdot g(1)\cdot g(2)\cdot \ldots \cdot g(n) = (-a)(1-a)\cdot \ldots \cdot (n-a)\cdot h(0)\cdot h(1)\cdot \ldots \cdot h(n)$

Deoarece $h \in \mathbf{Z}[X]$, avem că $h(0)\cdot h(1)\cdot \ldots \cdot h(n) \in \mathbf{Z}$

Pentru că $P = (-a)(1-a)\cdot \ldots \cdot (n-a)$ este produsul a $n+1$ numere întregi consecutive, din punctul **e)** rezultă că P este divizibil cu $(n+1)!$.

Deducem că numărul E este divizibil cu $(n+1)!$.

g) $\det(A)\cdot \det(A+I_3)\cdot \det(A+2I_3)\cdot \ldots \cdot \det(A+2006I_3) = f_A(0)\cdot f_A(1)\cdot \ldots \cdot f_A(2006)$.

Deoarece f_A are coeficienți întregi, aplicăm punctul **f)** pentru $n = 2006$ şi obținem concluzia.

Subiectul IV.

a) Calcul direct.

b) Pentru $x \in \mathbf{R}$, avem $g(x) = \operatorname{arctg}(\sin x)$ şi $g'(x) = f(x)$.

c) Funcția g este o primitivă a funcției f, pentru care $g(0) = 0$.

Se demonstrează că $\forall x \in \mathbf{R}$, $g(x+2\pi) = g(x)$, aşadar funcția g este periodică, de perioadă 2π.

d) Pentru $x \in \mathbf{R}$ şi $n \in \mathbf{Z}^*$, avem $f(2n\pi - x) = f(-x) \overset{\text{a)}}{=} f(x)$ (1)

Pentru $n = 0$, avem din **a)** $f(-x) = f(x)$, deci (1) este adevărată pentru orice $n \in \mathbf{Z}$.

Din (1) obținem că există $g(2n\pi - x) = -g(x)$, $\forall n \in \mathbf{Z}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

e) Considerăm funcția $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(t) = t \cdot f(t)$.

Obținem $I_1 = \int_0^{2\pi} h(t)\,dt = 0 = \int_0^{2\pi} h(2\pi - t)\,dt = 0$.

f) Pentru $k \in \mathbf{N}$, făcând schimbarea de variabilă $t - 2k\pi = y$, şi folosind **a)** obținem:

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} t \cdot f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (y + 2k\pi)\cdot f(y + 2k\pi)\,dy = \int_0^{2\pi} t \cdot f(t)\,dt = I_1 = 0.$$

Avem $I_n = \int_0^{2n\pi} t \cdot f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} t \cdot f(t)\,dt + \int_{2\pi}^{4\pi} t \cdot f(t)\,dt + \ldots + \int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} t \cdot f(t)\,dt = n \cdot I_1 = 0$.

g) Pentru $x > 0$, notăm cu $n = \left[\frac{x}{2\pi}\right] \in \mathbf{N}$ şi avem că $x \in [2n\pi, 2(n+1)\pi)$.

Atunci, $u(x) = \int_0^{x} t \cdot f(t)\,dt = I_n + \int_{2n\pi}^{x} t \cdot f(t)\,dt = \int_{2n\pi}^{x} t \cdot f(t)\,dt$.

$u\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \int_{2n\pi}^{2n\pi + \frac{\pi}{2}} t \cdot f(t)\,dt$ şi făcând schimbarea de variabilă $t - 2n\pi = y$ obținem:

$\lim_{n \to \infty} u\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \infty$.

Avem însă $u(2n\pi) = \int_{2n\pi}^{2n\pi} t \cdot f(t)\,dt = 0$, de unde $\lim_{n \to \infty} u(2n\pi) = 0$.

În concluzie, nu există $\lim_{x \to \infty} \int_0^{x} t \cdot f(t)\,dt$.